TITLE:

久保揺動力について(第3回『非平衡系の統計物理』シンポジウム(その1),研究会報告)

AUTHOR(S):

岡部, 靖憲

CITATION:

岡部, 靖憲. 久保揺動力について(第3回『非平衡系の統計物理』シンポジウム(その1),研究会報告). 物性研究 1996, 66(1): 65-75

ISSUE DATE:

1996-04-20

URL:

http://hdl.handle.net/2433/95721

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

久保揺動力について

岡部靖憲 (東大工学部計数工学科)

§1. 定常過程と定常流

$\mathbf{X} = (X(t); t \in \mathbf{R})$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で定義され, 相関関数 $R : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ をもつ弱定常過程とする:

$$E(X(t)X(s)) = R(t-s). \tag{1.1}$$

ヒルベルト空間 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 内の閉部分空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{X}}$ を

$$\mathcal{H}_{\mathbf{X}} \equiv \{X(t); t \in \mathbf{R}\} \text{ の張る閉部分空間} \tag{1.2}$$

で定義する. この空間はつぎの内積

$$(Y_1, Y_2) \equiv E(Y_1 \bar{Y}_2) \tag{1.3}$$

をもつヒルベルト空間となる. そのとき, $\mathcal{H}_{\mathbf{X}}$ 上で作用するユニタリー群 $(U(t); t \in \mathbf{R})$:

$$U(t)(X(s)) = X(s+t) \tag{1.4}$$

が定まる. 各 $t \in \mathbf{R}$ に対して, 確率変数 $X(t)$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{X}}$ の中のベクトル $A(t)$

$$A(t) \equiv X(t) \tag{1.5}$$

と見なすことによって, $\mathcal{H}_{\mathbf{X}}$ の中の流れ $\mathbf{A} = (A(t); t \in \mathbf{R})$ ができる. 性質 (1.1) より

$$(A(t), A(s)) = (A(t-s), A(0)) = R(t-s) \tag{1.6}$$

が成り立つので, 流れ $\mathbf{A}$ を相関関数 R を持つ定常流とよぶ.

§2. 定常流とハミルトニアン

一般に, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の中の流れ $\mathbf{A} = (A(t); t \in \mathbf{R})$ でつぎの性質

$$(A(t), A(s)) = (A(t-s), A(0)) \tag{2.1}$$

を満たすものを定常流と名付ける. ここで, $(,\star)$ はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の内積である.

(1.2) と同様に, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 内の閉部分空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$ を

(2.2) $$\mathcal{H}_{\mathbf{A}} \equiv \{A(t); t \in \mathbf{R}\} \text{ の張る閉部分空間}$$

を考える. (1.4) と同様に, $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$ 上で作用するユニタリー群 $(U(t); t \in \mathbf{R})$:

(2.3) $$U(t)(A(s)) = A(s+t)$$

が定まる. 一般論より, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$ に作用する自己共役作用素 L で

(2.4) $$U(t) = e^{itL}$$

を満たす線形作用素が存在する. これを定常流に付随するハミルトニアンと呼ぶ.

§3. ハミルトニアン、森揺動力とランジュヴァン方程式

つぎの条件

(3.1) $$A(0) \in \mathcal{D}(L)$$

のもとで, 森肇氏の理論 ([17]) が展開された. この条件は定常流 $\mathbf{A}$ がヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$ 内の可微分な流れであることを意味する. すなわち, 流れ $\mathbf{A}$ の速度流とも言うべき $\dot{\mathbf{A}} = (\dot{A}(t); t \in \mathbf{R})$

(3.2) $$\dot{A}(t) \equiv \frac{dA(t)}{dt}$$

が定義される.

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathbf{A}}$ 内の閉部分空間 $\mathcal{H}_1$

(3.3) $$\mathcal{H}_1 \equiv \mathcal{H}_{\mathbf{A}} \ominus [A(0)]$$

とそこに作用する自己共役作用素 L_1

(3.4) $$L_1 \equiv (I - P_0)L$$

を定める. ここで, 作用素 P_0 は初期ベクトル $A(0)$ で張られる一次元の空間 $[A(0)]$ への直交射影作用素である.

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ 内の定常流として, 森揺動力 $\mathbf{I}_M = (I_M(t); t \in \mathbf{R})$ が

$$I_M(t) \equiv e^{itL_1}(I - P_0)\dot{A}(0) \tag{3.5}$$

で定義される.

森の振動数 ω_M と 森の核関数 $\varphi_M : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ を

$$\omega_M \equiv i^{-1}(\dot{A}(0), A(0))(A(0), A(0))^{-1} \tag{3.6}$$

$$\varphi_M(t) \equiv (I_M(t), I_M(s)) \cdot (A(0), A(0))^{-1} \tag{3.7}$$

で定める.

森理論の基本は共分散関数 R のラプラス-フーリエ変換として定義される**複素移動関数** $[R] : \mathbf{C}^+ \longrightarrow \mathbf{C}$

$$[R](\zeta) \equiv \int_0^\infty e^{i\zeta t} R(t) dt \tag{3.8}$$

を解析的に表現したことである. それはつぎで与えられる:

$$[R](\zeta) = \frac{R(0)}{-i\omega_M - i\zeta + \int_0^\infty e^{i\zeta t}\varphi_M(t)dt}. \tag{3.9}$$

これと同値な表現として, 定常流 $\mathbf{A}$ の時間発展を記述する森の方程式が得られる:

$$\dot{A}(t) = i\omega_M A(t) - \int_0^t \varphi_M(t-s)A(s)ds + I_M(t) \quad (t \in \mathbf{R}). \tag{3.10}$$

§4. ハミルトニアン、久保揺動力とランジュヴァン方程式—(1)

条件 (3.1) が成り立たない場合

$$A(0) \notin \mathcal{D}(L) \tag{4.1}$$

に対しても, 定常流 $\mathbf{A}$ の時間発展を記述する方程式をもとめるのが KMO-ランジュヴァン方程式論である ([12],[26],[27]). そこで, 揺動力として久保揺動力が導入された.

そのために, 初期ベクトル $A(0)$ を $\mathcal{D}(L)$ に属する元 A_n の列 $(n \in \mathbf{N})$

$$A_n \equiv n \int_0^\infty e^{-nt} U(t) A(0) dt \tag{4.2}$$

で近似する:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A(0) \qquad (\text{in } \mathcal{H}_{\mathbf{A}}). \tag{4.3}$$

複素移動関数 $[R]$ は初期ベクトル A_n に関する複素移動関数 $[R_n]$ の列で近似される:

$$\begin{aligned}[R](\zeta) &= \lim_{n\to\infty}[R_n](\zeta)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{i\zeta t}(U(t)A_n, A_n)dt\end{aligned} \tag{4.4}$$

従って, 各 n に対して, 森理論の (3.9) を用いて

$$[R_n](\zeta) = \frac{R_n(0)}{-i\omega_M^{(n)} - i\zeta + \int_0^\infty e^{i\zeta t}\varphi_M^{(n)}(t)dt} \tag{4.5}$$

となる. 数列 $\omega_M^{(n)}$ は収束しないので, 次の様に renormalization をする

$$\beta_n \equiv -i\omega_M^{(n)} + 2\pi[\varphi_M^{(n)}](0+i0)$$

$$\gamma_\epsilon^{(n)}(t) \equiv -\chi_{[0,\infty)}(t)\int_t^\infty e^{-\epsilon s}\varphi_M^{(n)}(s)ds$$

$$(-i\zeta)\int_0^\infty e^{i\zeta t}\gamma_\epsilon^{(n)}(t)dt = \int_t^\infty e^{i(\zeta+i\epsilon)t}\varphi_M^{(n)}(s)ds - \int_t^\infty e^{-\epsilon t}\varphi_M^{(n)}(t)dt$$

$$\int_0^\infty e^{i\zeta t}\gamma_\epsilon^{(n)}(t)dt = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(\lambda-\zeta-i\epsilon)(\lambda-i\epsilon)}\kappa_M^{(n)}(d\lambda).$$

ここで、$\kappa_M^{(n)}$ は

$$\varphi_M^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-it\lambda}\kappa_M^{(n)}(d\lambda)$$

を満たす（Bochner の定理より定まる）有界な Borel 測度である.

このとき

複素移動関数 $[R]$ に関して次の表現が得られる:

$$[R](\zeta) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\beta - i\zeta - i\zeta K(\zeta)}. \tag{4.6}$$

ここで

$$\alpha > 0, \beta > 0 \tag{4.7}$$

$$K(\zeta) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{(\lambda-\zeta-i\epsilon)(\lambda-i\epsilon)}\kappa(d\lambda)\cdot(\sqrt{2\pi}\alpha)^{-1} \tag{4.8}$$

(4.9) $\kappa(d\lambda)$ は直線上の Borel 測度で $\displaystyle\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{1+\lambda^2}\kappa(d\lambda) < \infty.$

§5. ハミルトニアン、久保揺動力とランジュヴァン方程式—(2)

今までの準備の下で, 久保揺動力が導入される. ユニタリー群 $(U(t);t\in\mathbf{R})$ に関するスペクトル分解

(5.1) $$U(t)=\int_{\mathbf{R}}e^{-it\xi}dE(\xi)$$

を用いて

(5.2) $$A(t)=\int_{\mathbf{R}}e^{-it\xi}dE(\xi)A(0)$$

を得る. シュワルツの急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ の元 φ を用いて定常流 $\mathbf{A}$ を正則化して, 超定常流 $(A(\varphi);\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}))$ を定義する:

(5.3) $$A(\varphi)\equiv\int_{\mathbf{R}}\varphi(t)A(t)dt.$$

正数 $\eta>0$ に対して, コーシー核 P_η を

(5.4) $$P_\eta(x)=\frac{\eta}{\pi(\eta^2+x^2)}$$

として, 超定常流 $(I_\eta(\varphi);\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}))$ を定義する:

(5.5) $$I_\eta(\varphi)\equiv\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}}P_\eta*(\hat{\varphi}(\cdot)[R](\cdot+i\eta)^{-1})(\xi)dE(\xi)A(0).$$

適当な条件の下で, 久保揺動力 $\mathbf{I}_K=(I_K(\varphi);\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}))$ が上の超定常流の極限として定まる:

(5.6) $$I_K(\varphi)=\lim_{\eta\downarrow 0}I_\eta(\varphi).$$

久保揺動力の共分散は

(5.7) $$(I_K(\varphi),I_K(\psi))=\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{R(0)}\right)^2\int_{\mathbf{R}}\hat{\varphi}(\xi)\bar{\hat{\psi}}(\xi)\kappa(d\xi)$$

で与えらる. 即ち, 久保揺動力のスペクトル測度は $(\frac{\sqrt{2\pi}}{R(0)})^2\kappa(d\xi)$ である.

この久保揺動力を揺動力とすることによって, 複素移動関数 $[R]$ の表現 (4.5) の同値な表現として, 定常流 $\mathbf{A}$ の時間発展を与える方程式が, 超定常流 $(A(\varphi);\varphi\in\mathcal{S}(\mathbf{R}))$ の言葉で, 導かれる:

(5.8) $$\dot{A}(\varphi)=-\beta A(\varphi)-\lim_{\epsilon\downarrow 0}(\gamma_\epsilon*\dot{A})(\varphi)+\alpha I_K(\varphi).$$

ここで

(5.9) $$K_\epsilon(\zeta)\equiv\int_{\mathbf{R}}\frac{1}{(\lambda-\zeta-i\epsilon)(\lambda-i\epsilon)}\kappa(d\lambda).$$

久保揺動力の存在条件

$$R(t) \equiv (A(t), A(0))$$
$$[R](\zeta) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\zeta t} R(t)dt$$
$$(R)(\xi + i\eta) \equiv \frac{[R](\xi + i\eta)}{[R](\xi + i\eta)^*}$$

(H.1) $$R(0) \neq 0$$

(H.2) $$D \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty e^{-\epsilon t} R(t)dt \neq 0$$

(H.3) $$\exists \lim_{\eta\to 0}(R)(\xi + i\eta) \equiv (R)(\xi) \quad \forall\xi \in \mathbb{R}$$

(H.4) $$\exists \lim_{\eta\to 0}(R)(\xi + t\eta + i\eta) \equiv (R)(\xi; t) \quad \forall\xi, t \in \mathbb{R}$$

(H.5) $$(R)(\xi; t) = (R)(\xi) \quad \forall\xi \in \mathrm{supp}\kappa, t \in \mathbb{R}$$

(H.6) $$\exists C > 0 \text{ such that } \left|\frac{(R)(\xi_1) - (R)(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2}\right| \leq c \quad \text{a.e.}\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$$

(H.7) $$\kappa(\mathbb{R}) < \infty$$

§ 6. Alder-Wainwright 効果と Stokes-Boussinesq-Langevin 方程式

1960 年代末, Alder と Wainwright[1] は, 剛体球と剛体円板からなる流体モデルのコンピューターシミュレーションによる実験によって, ブラウン粒子とみなす剛体球の速度の相関関数 R が指数的減衰をせず,

(6.1) $$R(t) \asymp \frac{1}{t^{3/2}} \quad (t \to \infty)$$

という長時間挙動を示す **Alder-Wainwright** 効果を発見し, Einstein のブラウン運動の理論, Langevin の確率微分方程式の理論に疑義がかかった. 確率論的には, 実際のブラウン運動はマルコフ性を持たない事になる.

理論に疑義がかかればそれを修正する伝統を持つ物理学では, Einstein と Langevin より以前の 19 世紀末の Stokes[46] と Boussinesqu[3] の研究を基礎に, 久保の線形応答理論を適用して, Alder-Wainwright 効果は今や物理理論·物理実験として検証済みである ([48],[13],[44]).

そこで立てられたモデルは，粘性 η，密度 ρ の液体中を，半径 r，質量 m の剛体球が，時刻 t で揺動力 $W(t)$ と抵抗力 $F(t)$ を受け，速度が $X(t)$ で動くモデルで，次の **Stokes-Boussinesq-Langevin** 方程式：

$$(6.2) \qquad m^{*}\dot{X}(t) = -6\pi r\eta X(t) - 6\pi r^{2}\left(\frac{\rho\eta}{\pi}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{t-s}}\dot{X}(s)ds + W(t)$$

で記述される．ここで m^{*} は次式で与えられる有効質量である：

$$(6.3) \qquad m^{*} = m + \frac{2}{3}\pi r^{3}\rho.$$

方程式 (6.2) の右辺に於ける積分項は，剛体球によってはねのけられた液体が長い時間をかけて剛体球に及ぼす力である．この力は，Einstein の研究では無視されたが，約 65 年後に，コンピュウターの発達によって復活したのであった．方程式 (6.2) の解である確率過程はマルコフ性を持たない．

Stokes-Boussinesq-Langevin 方程式 (6.2) で記述される確率過程 $\mathbf{X} = (X(t); t \in \mathbb{R})$ がマルコフ性を持たないのなら，如何なる定性的性質を持つのであろうか．それに答えたのが KMO-Langevin 方程式の理論である ([24],[25],[28],[29,[39])．(6.2) に於ける揺動力 $W(t)$ として，ブラウン運動の微分であるホワイトノイズと久保揺動力の二つが調べられ，いずれの場合も方程式 (6.2) の解である弱定常過程は，その相関関数 R が $[0,\infty)$ 上の有界な Borel 測度 σ の Laplace 変換で書ける，という鏡映正値性を持つ：

$$(6.4) \qquad R(t) = \int_{0}^{\infty} e^{-|t|\lambda}\, d\sigma(\lambda).$$

逆に鏡映正値性をもち，次の条件

$$(6.5) \qquad \sigma(\{0\}) = 0, \qquad 0 < \int_{0}^{\infty} \lambda\, \sigma(d\lambda) < \infty$$

を満たす弱定常過程 $\mathbf{X} = (X(t); t \in \mathbb{R})$ の時間発展は，Stokes-Boussinesq-Langevin 方程式 (6.2) の一般化として，次の第二 **KMO-Langevin** 方程式 (6.6) によって記述される：

$$(6.6) \qquad \dot{\mathbf{X}} = -\beta_{2}\mathbf{X} - \lim_{\epsilon\downarrow 0}\gamma_{2,\epsilon} * \dot{\mathbf{X}} + \alpha_{2}\mathbf{I}_{K}.$$

ここで，三つ組 $(\alpha_{2}, \beta_{2}, \rho_{2})$ は

$$(6.7) \qquad \begin{cases} \alpha_{2} > 0, \beta_{2} > 0 \\ \rho_{2} \text{ は } [0,\infty) \text{ 上の Borel 測度で，} \rho_{2}(\{0\}) = 0, \int_{0}^{\infty}\frac{1}{\lambda+1}\rho_{2}(d\lambda) < \infty, \end{cases}$$

を満たし，$\gamma_{2,\epsilon}$ $(\epsilon \geq 0)$ は次で与えられる関数である：

$$\gamma_{2,\epsilon}(t) = \chi_{(0,\infty)}(t) \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-t\lambda} \rho_2(d\lambda). \tag{6.8}$$

さらに I_K は久保揺動力である．ブラウン運動の微分であるホワイトノイズ$\dot{\mathbf{B}}$を揺動力とする第一 **KMO-Langevin** 方程式も導くことができる．

相関関数の多項式的減衰は，**KMO-Langevin** 方程式の枠組みの中で，遅れの項の$\gamma_{2,0}$ の多項式的減衰で特徴付けられる事で，**Alder-Wainwright** 効果の数学的構造が明らかになった([29],[34],[41],[10—11])．

鏡映正値性をもつ定常流の一般論は連続系のみならず離散系に対して展開され，久保揺動力とホワイト揺動力に基づき揺動散逸定理が示されている ([30—34])．鏡映正値性をもつ定常流に対しては，森理論は適用できない．量子系において，**RWA-oscillator** に対するハミルトニアンに対して森理論を適用した広川君の仕事 ([9]) がある．久保揺動力を導入せざるをえない量子系のハミルトニアンの例はあると思われる（量子ホール効果）．次回までに調べたいと思っている．

§ 7 揺動散逸定理 (Fluctuation-Dissipation Theorem)

§6 で述べた揺動散逸定理 (**FDT**) の心は，「複雑な挙動をする現象も定常状態では，その時間発展を記述する運動方程式は，ランダムな動の部分 (揺動項) と力学的な静の部分 (散逸項) に分けられ，両項の間にはある関係式が成り立つ」というふうに要約できる．

人の研究活動に於いて，悩み喜ぶ研究過程が揺動部分に，その研究結果の発表行動が散逸部分に相当する様に思われる．研究結果が意外であればあるほど厳しい批判を受けるが，それを自分に揺動力として課し，研究活動をさらに続け，努力に見合った成果を再び発表する．これを繰り返し継続していける状態が定常であると思う．

この揺動散逸定理 (**FDT**) を哲学として昇華させた揺動散逸原理 (**FDP**) を指導原理として，**KM₂O**-ランジュヴァン方程式論を展開し，複雑系の非線形構造を探る非線形時系列解析を行っている ([34],[39],[40],[42],[43])．

上で述べた **FDT** は，数学として如何に表現されるかを見てみる．§6 で扱った弱定常過程 $\mathbf{X}$ をとり上げ，その拡散係数 Dを

$$D \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{\int_{\Omega}(\int_0^t X(s)ds)^2 dP}{2t} \tag{7.1}$$

で定めると，これは次の様に直接計算出来る：

$$(7.2) \qquad D=\int_0^\infty R(t)dt=\int_0^\infty \frac{1}{\lambda}\sigma(d\lambda).$$

一般化された第一種 FDT　第二 KMO-Langevin 方程式 (6.6) に基づき $\mathbf{C}^+\cup(\mathbf{R}-\{0\})$ に於いて，

$$(\text{FDT-1}) \qquad \frac{1}{\beta_2-i\zeta-i\zeta\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_0^\infty e^{i\zeta t}\gamma_{2,\epsilon}(t)dt}=\frac{1}{R(0)}\int_0^\infty e^{i\zeta t}R(t)dt$$

が成立する．

Einstein の関係式．　第二 KMO-Langevin 方程式 (6.6) に基づき

$$(\text{FDT-2}) \qquad D=\frac{R(0)}{\beta_2}.$$

を得る．

文献

[1]. Alder, B.J. and T.E. Wainwright, *Velocity autocorrelations for hard spheres*, Phys. Rev. Lett. **18** (1967), 988–990.

[2]. ———, *Decay of the velocity autocorrelation function*, Phys. Rev. Lett. **A.1** (1970), 18–21.

[3]. Boussinesq, J., *Sur la résistance qu'oppose un liquide indéfini en repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide*, C.R. Acad. Sci. Paris **100** (1885), 935–937.

[4]. Brown, R., Philos. Mag., Ann. of Philos. **4** (1828), 161–178.

[5]. Doob, J.L., *The Brownian movement and stochastic equations*, Ann. Math. **43** (1942), 351–369.

[6]. ———, *The elementary Gaussian processes*, Ann. Math. Stat. **15** (1944), 229–282.

[7]. Einstein, A., *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme ge- forderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen* , Drudes Ann. **17** (1905), 549–560.

[8]. Hida, T., *Analysis of Brownian functionals, Carleton Mathematical Lecture Notes, no. 13, 1975.*.

[9]. Hirokawa, M., *Mori's memory kernel equation for a quantum harmonic oscillator cou pled to RWA-oscillator*, Annals of Physics **224** (1993), 301–341.

[10]. Inoue, A., *The Alder-Wainwright effect for stationary processes with reflection positivity (I)*, J. Math. Soc. Japan **43** (1991), 515–526.

[11]. ———, *The Alder-Wainwright effect for stationary processes with reflection positivity (II)*, Osaka J. Math. **28** (1991), 537–561.

[12]. Kubo, R., *Statistical mechanical theory of irreversible processes I, general theory and simple applicatons to magnetic and conduction problems*, J. Phys. Soc. Japan **12** (1957), 570–586.

[13]. ———，非可逆過程と確率過程，確率過程論と開放系の統計力学 (数理解析研究所講究録) **367** (1979), 50–93.

[14]. Langevin, P., *Sur la théorie du mouvement brownien*, C.R.Acad.Sci.Paris **146** (1908), 530–533.

[15]. Miyoshi, T., *On (l,m)-string and($\alpha,\beta,\gamma,\delta$)-Langevin equation associated with a stationary Gaussian process*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA. **30** (1983), 139-190.

[16]. ———, *On an $\mathbb{R}^d$-valued stationary Gaussian process associated with (k,l,m)-string and ($\alpha,\beta,\gamma,\delta$)-Langevin equation*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA. **31** (1984), 154-194.

[17]. Mori, H., *Transport, collective motion and Brownian motion*, Progr. Theor. Phys. **33** (1965), 423–455.

[18]. Okabe, Y., *On a stationary Gaussian process with T-positivity and its associated Langevin equation and S-matrix*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA Math. **26** (1979), 115–165.

[19]. ———, *On a stochastic differential equation for a stationary Gaussian process with T-positivity and the fluctuation-dissipation theorem*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA Math. **28** (1981), 169–213.

[20]. ———, Langevin 方程式について, 数学 **33** (1981), 306–324.

[21]. ———, *On a stochastic differential equation for a stationary Gaussian process with finite multiple Markovian property and the fluctuation-dissipation theorem*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA Math. **28** (1982), 793–804.

[22]. ———, *On a wave equation associated with prediction errors for a stationary Gaussian process*, Lecture Notes in Control and Information Sci. **49** (1983), 215–226.

[23]. ———, *A generalized fluctuation-dissipation theorem for one-dimensional difusionprocess*, Commun. Math. Phys. **98** (1985), 449–468.

[24]. ———, *On KMO-Langevin equations for stationary Gaussian process with T-positivity*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, SectIA Math. **33** (1986), 1–56.

[25]. ———, *On the theory of Brownian motion with the Alder-Wainwright effect*, J. Stat. Phys. **45** (1986), 953–981.

[26]. ———, *KMO-Langevin equation and fluctuation-dissipation theorem (I)*, Hokkaido Math. J. **15** (1986), 163–216.

[27]. ———, *KMO-Langevin equation and fluctuation-dissipation theorem (II)*, Hokkaido Math. J. **15** (1986), 317–355.

[28]. ———, *Stokes-Boussinesq-Langevin equation and fluctuation-dissipation theorem*, Probability Theory and Mathematical Statistics (ed. by Prohorov et al.), VNU Science Press **2** (1986), 431–436.

[29]. ———, *On long time tails of correlation functions for KMO-Langevin equations*, Proceedings of the Fourth Japan-USSR Symposium on Probability and Mathematical Statistics, Kyoto, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Tokyo **1299** (1986), 391–397.

[30]. ———, *On the theory of discrete KMO-Langevin equations with reflection positivity (I)*, Hokkaido Math. J. **16** (1987), 315–341.

[31]. ———, *On the theory of discrete KMO-Langevin equations with reflection positivity (II)*, Hokkaido Math. J. **17** (1988), 1–44.

[32]. ———, *On the theory of discrete KMO-Langevin equations with reflection positivity (III)*, Hokkaido Math. J. **18** (1989), 149–174.

[33]. ———, *On stochastic difference equations for the multi-dimensional weak-ly stationary time series*, Prospect of Algebraic Analysis(ed. by M. Kashiwara and T. Kawai), Academic press, Tokyo, 1988, pp. 601–645.

[34]. ———, Langevin 方程式と因果解析, 数学 **43** (1991), 322–346.

[35]. ———, 自然科学と定常過程, 数理科学 **340** (1991), 21–28.

[36]. ———, 確率過程の特徴付け 定性的性質からモデルへ, 数理科学 **347** (1992), 11–17.

[37]. ———, *Application of the theory of KM_2O-Langevin equations to the linear prediction problem for the multi-dimensional weakly stationary time series*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 277–294.

[38]. ———, *A new algorithm derived from the view-point of the fluctuation-dissipation principle in the theory of KM_2O-Langevin equations*, Hokkaido Math. J. **22** (1993), 199–209.

[39]. ———, *Langevin equations and causal analysis*, SUGAKU Expositions in Amer. Math. Soc. Transl. **161** (1994), 19–50.

[40]. Okabe, Y. and Y. Nakano, *The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (I):Stationary analysis*, Hokkaido Math. J. **20** (1991), 45-90.

[41]. Okabe, Y. and A. Inoue, *On the expontial decay of the correlation functions for KMO-Langevin equations*, Japanese. J. Math. **18** (1992), 13–24.

[42]. Okabe, Y. and A. Inoue, *The theory of KM_2O-Langevin equations and its applications to data analysis (II):Causal analysis*, Nagoya Math. J. **134** (1994), 1–28.

[43]. Okabe, Y. and T. Ootsuka, *Application of the theory of* KM_2O*-Langevin equations to the non-linear prediction problem for the one-dimensional strictly stationary time series*, J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 349–367.

[44]. Oobayashi, K., Kohno, T. and H. Utiyama, *Photon correlation spectroscopy of the non-Markovian Brownian motion of spherical particles*, Phys. Rev. A **27** (1983), 2532–2641.
[45]. Perrin, J., *Mouvement brownien et réalité moléculaire*, Annales de chimie at de Physique **18** (1909), 5-114.
[46]. Stokes, G.G., *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, Trans. Cambridge Philos. Soc. **9** (1856), pt.2, 8–106.
[47]. Uhlenbeck, G.E. and L. S. Ornstein, *On the theory of Brownian motion*, Phys. Rev. **36** (1930), 823–841.
[48]. Widom, A., *Velocity fluctuations of a hard-core Brownian motion*, Phys. Rev. A **3** (1971), 1394–1396.
[49]. Wiener, N., *Differential space*, J. Math. and Phys. **2** (1923), 131–174.